7 класс, 6 день

1. Докажите, что число $\underbrace{222\ldots2}_{2012\text{ двоек}}$ не может быть представлено в виде суммы нескольких последовательных нечётных натуральных чисел.

2. Какое наименьшее количество чисел надо выбрать из множества $100!, 101!, 102!, 103!, \ldots, 200!$, чтобы их произведение было квадратом?

3. У Антона и Фёдора были две положительные дроби. Умный Фёдор перемножил эти дроби. Глупый Антон их сложил: числитель с числителем, а знаменатель со знаменателем. Замечательный Кирилл заметил, что у них получились одинаковые числа. Докажите, что одна из дробей была не больше единицы, а другая не меньше.

4. Натуральные x и y таковы, что
$$\frac{x}{x^2+z^2}=\frac{y}{y^2+z^2}$$
и число $x^2+y^2+z^2$ — простое. Докажите, что $x=y$.

5. Докажите, что для любого натурального n существуют два n-значных числа И, Г таких, что ($4n$-значное) число $\overline{\text{ИГГИ}}$ является точным кубом.

6. Решите в натуральных числах уравнение: $m!+n!=m^n$.

7. Назовем упорядоченную пару целых чисел (u,v) *пицундской*, если существуют натуральное n и целые (не обязательно различные) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ такие, что $x_1^3+x_2^3+\ldots+x_n^3=u$ и $x_1^5+x_2^5+\ldots+x_n^5=v$. Найдите количество пицундских пар (u,v), в которых $1\leqslant u,v\leqslant 2012$.